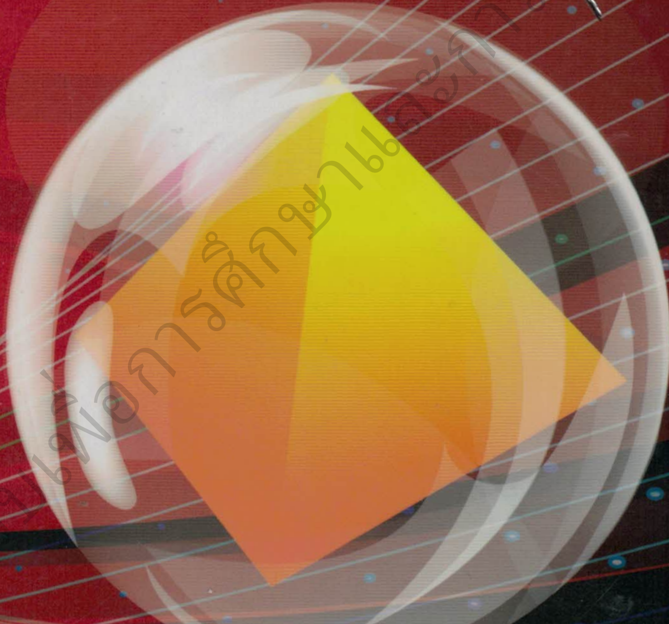
สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แคลคูลัส ๑
Calculus I



ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ณัฏฐนาถ ไตรภพ
ยุวรีย์ พันธ์กล้า

คำนำ

หนังสือ แคลคูลัส ๑ (CALCULUS I) เป็นหนังสือใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส ๑ เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย ลิมิต ความต่อเนื่อง อนุพันธ์ กฎลูกโซ่ ค่าเชิงอนุพันธ์ อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย การอินทิเกรต อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย ค่าสุดขีด ความเว้า การร่างกราฟ อัตราสัมพัทธ์ กฎของโลปิตาลและรูปแบบไม่กำหนด เทคนิคการอินทิเกรต พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นที่ภาคตัดได้ ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน งาน ความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้ง และอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

คณะผู้เรียบเรียงหนังสือแคลคูลัส ๑ ประกอบด้วย รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา รองศาสตราจารย์ณัฏฐนาถ ไตรภพ และรองศาสตราจารย์ยุวรีย์ พันธ์กล้า ซึ่งมีประสบการณ์การสอนวิชาแคลคูลัสให้กับนิสิตของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยเป็นเวลานานกว่า ๒๕ ปี คณะผู้เรียบเรียงหนังสือแคลคูลัส ๑ ได้รวบรวมเนื้อหาเพื่อให้หนังสือเล่มนี้สามารถใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส ๑ ให้กับนิสิตคณะวิทยาศาสตร์และนิสิตคณะอื่นๆ ที่เรียนวิชาแคลคูลัส ๑ กับภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ เช่น คณะวิศวกรรมศาสตร์ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี (ภาควิชาสถิติ) คณะครุศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์การกีฬา คณะเภสัชศาสตร์ คณะสหเวชศาสตร์

ผู้เรียบเรียงหวังว่าหนังสือแคลคูลัส ๑ เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนสำหรับนิสิตนักศึกษาและอาจารย์ผู้สอนในทุกสถาบันที่ต้องศึกษาวิชาแคลคูลัส

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

รองศาสตราจารย์ณัฏฐนาถ ไตรภพ

รองศาสตราจารย์ยุวรีย์ พันธ์กล้า

มกราคม 2560

สารบัญ

		หน้า
บทที่ 1	**ลิมิตและความต่อเนื่อง**	**1**
1.1	ความหมายของลิมิต	1
1.2	ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา	8
1.3	ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต	15
1.4	ลิมิตเกี่ยวกับอนันต์	27
1.5	ความต่อเนื่อง	45
	คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 1	62
บทที่ 2	**อนุพันธ์**	**67**
2.1	ความหมายของอนุพันธ์และการหาอนุพันธ์	67
2.2	กฎลูกโซ่	78
2.3	อนุพันธ์อันดับสูง	82
2.4	อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	85
2.5	อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย	97
2.6	ค่าเชิงอนุพันธ์	102
2.7	ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับอนุพันธ์	112
	คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 2	118
บทที่ 3	**การอินทิเกรต**	**123**
3.1	ปฏิยานุพันธ์และอินทิกรัลไม่จำกัดเขต	123
3.2	การคำนวณพื้นที่โดยใช้ลิมิตผลบวก	139
3.3	อินทิกรัลจำกัดเขต	154
3.4	ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส	166
	คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 3	180
บทที่ 4	**ฟังก์ชันอดิศัย**	**185**
4.1	ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ	185
4.2	ฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม	197

4.3	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	212
4.4	ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	221
4.5	ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	229
4.6	ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน	241
	คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 4	253
บทที่ 5	**การประยุกต์ของอนุพันธ์**	**263**
5.1	ค่าสุดขีด	263
5.2	ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า	288
5.3	การร่างกราฟ	295
5.4	อัตราสัมพัทธ์	305
5.5	กฎของโลปิตาลและรูปแบบไม่กำหนด	310
5.6	การหารากของสมการ $f(x) = 0$ โดยวิธีของนิวตัน	324
	คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 5	330
บทที่ 6	**เทคนิคการอินทิเกรต**	**335**
6.1	การอินทิเกรตทีละส่วน	335
6.2	การอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย	346
6.3	การอินทิเกรตเมื่อตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูป $\sin^m x \cos^n x$	357
6.4	การอินทิเกรตเมื่อตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูป $\sec^m x \tan^n x$ หรือ $\operatorname{cosec}^m x \cot^n x$	361
6.5	สูตรลดทอน	367
6.6	การอินทิเกรตฟังก์ชันตรรกยะของ $\sin x$ และ $\cos x$	374
6.7	การอินทิเกรตเมื่อตัวถูกอินทิเกรตประกอบด้วยพจน์ $\sqrt[n]{ax+b}$	380
6.8	การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ	384
	คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 6	392
บทที่ 7	**การประยุกต์ของอินทิกรัล**	**401**
7.1	พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง	401
7.2	ปริมาตรของรูปทรงตันซึ่งหาพื้นที่ภาคตัดได้	415

7.3	ปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุน	422
7.4	งาน	450
7.5	ความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งบนระนาบ	459
	คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 7	464
บทที่ 8	**อินทิกรัลไม่ตรงแบบ**	**467**
8.1	อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง	468
8.2	อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่สอง	478
8.3	อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดผสม	487
	คำตอบแบบฝึกหัดบทที่ 8	491
	บรรณานุกรม	**493**
	ดัชนี	**495**

บทที่ 1
ลิมิตและความต่อเนื่อง

1.1 ความหมายของลิมิต

การศึกษาเรื่องลิมิตเป็นสิ่งจำเป็นมาก เพราะลิมิตมีความสำคัญมากในทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับวิชาแคลคูลัส ในหัวข้อนี้เราจะเริ่มต้นด้วยการศึกษาแนวคิดเรื่องลิมิตของฟังก์ชันค่าจริง แล้วจึงนำไปสู่การให้บทนิยามของลิมิต

พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & \text{เมื่อ} \quad x<1 \\ 1 & \text{เมื่อ} \quad x=1 \\ 2x & \text{เมื่อ} \quad x>1 \end{cases}$$

เราคำนวณค่าของ f(x) สำหรับ x บางค่าที่มีค่าเข้าใกล้ 1 ได้ดังตารางต่อไปนี้

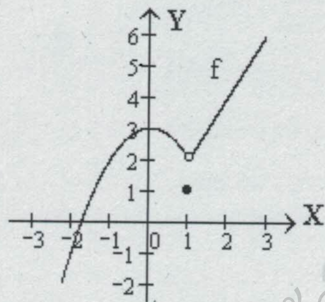
x	f(x)
1.1	2.2
1.01	2.02
1.001	2.002
1.0001	2.0002
1.00001	2.00002
1.000001	2.000002

x	f(x)
0.9	2.19
0.99	2.0199
0.999	2.001999
0.9999	2.00019999
0.99999	2.0000199999
0.999999	2.000001999999

เมื่อพิจารณาค่าของ f(x) จากตารางจะเห็นว่า ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ 1 ไม่ว่าจะเข้าใกล้ในลักษณะที่ $x < 1$ (ซึ่งจะกล่าวว่า x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย) หรือในลักษณะที่ $x > 1$ (ซึ่งจะกล่าวว่า x มีค่า

เข้าใกล้ 1 ทางขวา) เราจะได้ว่า f(x) มีค่าเข้าใกล้ 2 ในกรณีเช่นนี้เราจะกล่าวว่า f(x) มีลิมิตเป็น 2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ ซึ่งจะสังเกตได้ว่าในที่นี้ f(1) = 1 แต่เราไม่ได้สนใจค่าของ f(1) เลยว่าจะมีค่าเท่าไรหรือไม่มีค่า

นอกจากนั้น เราสามารถเขียนกราฟของ f ได้ดังรูปที่ 1.1.1



รูปที่ 1.1.1

ซึ่งจะสังเกตจากกราฟของ f ได้เช่นกันว่า f(x) มีค่าเข้าใกล้ 2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1

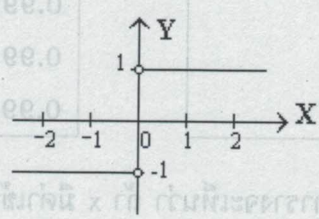
จากการศึกษาแนวคิดเรื่องลิมิตข้างต้นจะเห็นว่า ถ้าลิมิตมีค่า เราสามารถหาค่าของลิมิตโดยพิจารณาจากค่าของฟังก์ชัน ซึ่งอาจจะพิจารณากราฟของฟังก์ชันประกอบด้วยก็ได้ เราจะลองใช้วิธีการนี้พิจารณาหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

ให้ $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ จะเห็นว่า f(0) ไม่มีค่า

เพราะว่า $$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \ge 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

เราสามารถเขียนกราฟของ f ได้ดังรูปที่ 1.1.2



รูปที่ 1.1.2

จะสังเกตได้ว่า ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้าย แล้ว $f(x) = -1$

และ ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวา แล้ว $f(x) = 1$

จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ค่าของ $f(x)$ ไม่ได้เข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่งที่แน่นอน ในกรณีเช่นนี้เราจะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ไม่มีค่า และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ไม่มีค่า

ในการพิจารณาค่าของ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ เราต้องพิจารณาค่าของ $f(x)$ ที่จุดอื่น ๆ ใน D_f ที่อยู่ใกล้ a แสดงว่า a ต้องเป็นจุดที่มีจุดอื่นใน D_f อยู่ใกล้ ๆ ซึ่งจุดที่มีสมบัติเช่นนี้เราเรียกว่า จุดลิมิต เพราะฉะนั้นในการกล่าวถึงบทนิยามของลิมิต $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ จึงจำเป็นต้องรู้ความหมายของจุดลิมิตดังนี้

บทนิยาม 1.1.1 ให้ $E \subseteq R$ และ $a \in R$ เราจะกล่าวว่า a เป็น **จุดลิมิต** (limit point) ของ E ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก δ ที่กำหนดให้
จะได้ว่า $((a-\delta, a+\delta) - \{a\}) \cap E \neq \varnothing$

ตัวอย่างเช่น

1. ให้ $E_1 = [1, 2]$ จะได้ว่า จุดทุกจุดใน E_1 เป็นจุดลิมิตของ E_1
2. ให้ $E_2 = (1, 2)$ จะได้ว่า
   จุดทุกจุดใน E_2 เป็นจุดลิมิตของ E_2 รวมทั้ง 1 และ 2 ก็เป็นจุดลิมิตของ E_2
3. ให้ $E_3 = (1, 2) \cup \{3\}$ จะได้ว่า
   จุดทุกจุดใน [1, 2] เป็นจุดลิมิตของ E_3 แต่ 3 ไม่เป็นจุดลิมิตของ E_3
   เพราะว่า มี $\delta = 0.5$ ซึ่ง
   $((3-\delta, 3+\delta) - \{3\}) \cap E_3 = ((2.5, 3.5) - \{3\}) \cap E_3 = \varnothing$
4. ให้ $E_4 = \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่า E_4 ไม่มีจุดลิมิตเลย
5. ให้ $E_5 = R$ จะได้ว่าจุดทุกจุดใน E_5 เป็นจุดลิมิตของ E_5

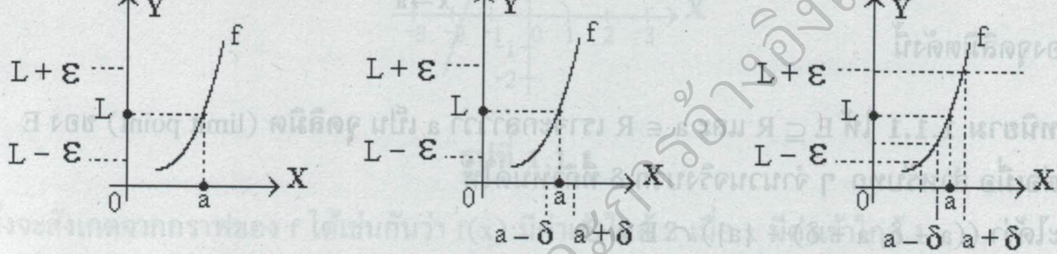
ข้อสังเกต

1. จุดลิมิตของเซตใดก็คือจุดที่มีจุดอื่นในเซตนั้นอยู่ใกล้ ๆ นั่นเอง ซึ่งอาจจะอยู่ใกล้ ๆ ทั้ง 2 ด้าน หรือด้านใดด้านหนึ่งเพียงด้านเดียวก็ได้ เช่น 1.5 เป็นจุดลิมิตของ (1, 2) โดยมีจุดอื่นใน (1, 2) อยู่ใกล้ ๆ 1.5 ทั้ง 2 ด้าน แต่ 1 เป็นจุดลิมิตของ (1, 2) โดยมีจุดอื่นใน (1, 2) อยู่ใกล้ ๆ 1 ทางด้านขวาเท่านั้น

2. จุดลิมิตของเซตใดอาจจะอยู่หรือไม่อยู่ในเซตนั้นก็ได้ เช่น 1.5 เป็นจุดลิมิตของ (1, 2) โดยที่ $1.5 \in (1, 2)$ แต่ 1 เป็นจุดลิมิตของ (1, 2) โดยที่ $1 \notin (1, 2)$

บทนิยาม 1.1.2 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D เราจะกล่าวว่า f(x) มี **ลิมิต (limit)** เป็นจำนวนจริง L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้ จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ทุก $x \in D$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta$

เราอาจพิจารณาความหมายของ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ได้จากรูปที่ 1.1.3



รูปที่ 1.1.3 (ก) **รูปที่ 1.1.3 (ข)** **รูปที่ 1.1.3 (ค)**

รูปที่ 1.1.3 (ก) สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε
รูปที่ 1.1.3 (ข) เราสามารถหาจำนวนจริงบวก δ ได้
รูปที่ 1.1.3 (ค) ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ทุก $x \in D$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta$

ทฤษฎีบท 1.1.1 ให้ $f : D \to R$ เมื่อ $D \subseteq R$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ มีค่า แล้ว ค่าของลิมิตมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

เพราะฉะนั้น ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ และ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$ แล้ว $L_1 = L_2$

บทพิสูจน์ สมมติว่า $L_1 \neq L_2$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}\,|L_1 - L_2| > 0$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ จะได้ว่า มี $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x) - L_1| < \frac{1}{2}\,|L_1 - L_2| \text{ ทุก } x \in D \text{ ซึ่ง } 0 < |x - a| < \delta_1$$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$ จะได้ว่า มี $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x) - L_2| < \frac{1}{2}\,|L_1 - L_2| \text{ ทุก } x \in D \text{ ซึ่ง } 0 < |x - a| < \delta_2$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

เนื่องจาก a เป็นจุดลิมิตของ D ดังนั้นจะมี $x \in ((a-\delta, a+\delta) - \{a\}) \cap D$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\le |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &< \frac{1}{2}|L_1 - L_2| + \frac{1}{2}|L_1 - L_2| \\ &= |L_1 - L_2| \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $L_1 = L_2$ □

ตัวอย่าง 1.1.1 จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to -1} (4x + 9) = 5$

แนวคิด เราจะต้องแสดงว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้

จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$

ที่ทำให้ $|(4x + 9) - 5| < \varepsilon$ ทุก $x \in R$ ซึ่ง $0 < |x + 1| < \delta$

จะเห็นว่าจุดสำคัญของการแสดงข้อความนี้อยู่ที่การเลือก δ ที่เหมาะสม ซึ่งสามารถทำได้

โดยพิจารณาจาก $|(4x + 9) - 5|$ ดังนี้

$$\begin{aligned} |(4x + 9) - 5| &= |4x + 4| \\ &= 4|x + 1| \\ &< 4\delta \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น เราควรเลือก δ ที่ทำให้ $4\delta \le \varepsilon$ หรือ $\delta \le \frac{\varepsilon}{4}$

วิธีทำ ให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ เพราะฉะนั้น $\delta > 0$

ให้ $x \in R$ ซึ่ง $0 < |x + 1| < \delta$

จะได้ว่า $|(4x + 9) - 5| = |4x + 4| = 4|x + 1| < 4\delta = (4)(\frac{\varepsilon}{4}) = \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $|(4x + 9) - 5| < \varepsilon$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้

จะมีจำนวนจริง $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ ที่ทำให้ $|(4x + 9) - 5| < \varepsilon$ ทุก $x \in R$ ซึ่ง $0 < |x + 1| < \delta$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to -1} (4x + 9) = 5$ □

ตัวอย่าง 1.1.2 จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

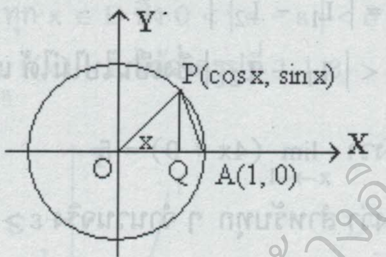
แนวคิด เราจะต้องแสดงว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้

จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|\sin x - 0| < \varepsilon$ ทุก $x \in R$ ซึ่ง $0 < |x - 0| < \delta$

วิธีทำ ในการเลือก δ เราจำเป็นต้องทราบความสัมพันธ์ระหว่าง $|\sin x|$ และ $|x|$

ให้ P เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยและ x เป็นมุม (หน่วยเรเดียน) ที่ $\overline{OP}$ ทำกับแกน X

กรณีที่ 1 $0 < x < \frac{\pi}{2}$



รูปที่ 1.1.4

จากรูปที่ 1.1.4 พิกัดของจุด P คือ $(\cos x, \sin x)$

ลากเส้นตรงจากจุด P มาตั้งฉากกับแกน X ที่จุด Q

จะได้ว่า $|\sin x| = \sin x = PQ \le PA \le$ ความยาวของส่วนโค้ง $PA = x = |x|$

เพราะฉะนั้น $|\sin x| \le |x|$ หรือ $\sin x \le x$ ทุก $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

กรณีที่ 2 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ จะได้ว่า $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\sin(-x) \le -x$

ซึ่งจะได้ว่า $-\sin x \le -x$

เพราะฉะนั้น $|\sin x| = -\sin x \le -x = |x|$

ดังนั้น จากทั้ง 2 กรณีจะได้ว่า $|\sin x| \le |x|$ ทุก $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \varepsilon$ เพราะฉะนั้น $\delta > 0$

ให้ $x \in R$ ซึ่ง $0 < |x - 0| < \delta$

จะได้ว่า $|\sin x - 0| = |\sin x| \le |x| < \delta = \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $|\sin x - 0| < \varepsilon$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้

จะมีจำนวนจริง $\delta = \varepsilon$ ที่ทำให้ $|\sin x - 0| < \varepsilon$ ทุก $x \in R$ ซึ่ง $0 < |x - 0| < \delta$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ □

แบบฝึกหัด 1.1

1. ให้ $\lim\limits_{x\to 3} (2x - 9) = -3$

   จงแสดงว่า สำหรับจำนวนจริงบวก ε

   จะได้ว่า $\left|(2x - 9) + 3\right| < \varepsilon$ ทุก $x \in R$ ซึ่ง $0 < \left|x - 3\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

2. ให้ $\lim\limits_{x\to -1} (2 + 3\left|x\right|) = 5$

   จงหาจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้

   $\left|(2 + 3\left|x\right|) - 5\right| < 0.015$ ทุก $x \in R$ ซึ่ง $0 < \left|x + 1\right| < \delta$

3. ให้ $\lim\limits_{x\to -2} x^2 = 4$

   จงแสดงว่า ถ้า $0 < \left|x + 2\right| < 0.01$ แล้ว $\left|x^2 - 4\right| < 0.05$

4. ให้ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$

   จงแสดงว่า สำหรับจำนวนจริงบวก ε

   ถ้า $1 < x < 3$ และ $0 < \left|x - 2\right| < 6\varepsilon$ แล้ว $\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$

5. โดยใช้บทนิยาม 1.1.2 จงแสดงว่า

   5.1 $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$

   5.2 $\lim\limits_{x\to 1} (2x + 4) = 6$

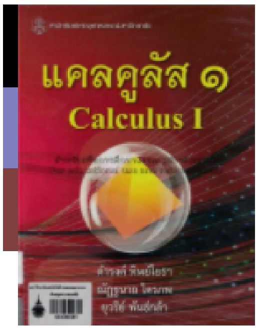
   5.3 $\lim\limits_{x\to -1} (3x + 2) = -1$

   5.4 $\lim\limits_{x\to 3} (8 - 2x) = 2$

   5.5 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$

สามารถยืมและติดตามหนังสือใหม่ได้ที่ ระบบห้องสมุดอัตโนมัติ WALAI AutoLib

http://lib.rmutp.ac.th/catalog/BibItem.aspx?BibID=b00104534



Multi view View map

แคลคูลัส 1 = Calculus I / ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ และ ยุวรีย์ พันธ์กล้า.

Author	ดำรงค์ ทิพย์โยธา
Published	กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2561
Edition	พิมพ์ครั้งที่ 5
Detail	500 หน้า : ภาพประกอบ ; 26 ซม
Subject	แคลคูลัส(+)
	การอินทิเกรต(+)
	คณิตศาสตร์(+)
	สมการเชิงอนุพันธ์(+)
	ฟังก์ชัน(+)
	อินทิกรัลแคลคูลัส(+)
Added Author	ณัฏฐนาถ ไตรภพ
	ยุวรีย์ พันธ์กล้า
ISBN	9789740333883
ประเภทแหล่งที่มา	Book