สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พิมพ์ครั้งที่ 10
ฉบับปรับปรุงใหม่

# วิธีเชิงตัวเลข
## ทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม

MATLAB, C
Mathematica
Fortran, Pascal

Numerical Methods in Science and Engineering

ปราโมทย์ เดชะอำไพ
นิพนธ์ วรรณโสภาคย์

# คำนำพิมพ์ครั้งที่ 10

เนื่องจากวิธีเชิงตัวเลขได้ถูกนำไปใช้ในการเรียนการสอนในหลากหลายสาขามากยิ่งขึ้น ผู้เขียนจึงได้เปลี่ยนชื่อหนังสือจากเดิมไปเป็น “วิธีเชิงตัวเลขทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม” โดยได้ปรับปรุงเนื้อหาให้มีความกระชับเข้าใจได้โดยง่าย และลดขนาดของตัวอักษรลงเพื่อลดราคาหนังสือ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งเขียนด้วยภาษาต่าง ๆ ได้นำขึ้นเว็บไซต์ชื่อ

https://goo.gl/mcMVDE

เพื่อผู้อ่านสามารถดาวน์โหลดมาใช้ได้โดยตรง โปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้สอดคล้องกับเนื้อหาทฤษฎีในหนังสือ ทำให้ผู้ศึกษาสามารถทำความเข้าใจได้อย่างรวดเร็ว อันจะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาความรู้ทางด้านนี้เพื่อสามารถใช้ซอฟต์แวร์ในระดับสูงได้อย่างถูกต้องและการทำวิจัยต่อเนื่องขึ้นไป

ผู้เขียนขอขอบคุณ น.ส.เบญจาภา ยนต์สกุล นิสิตปริญญาโทผู้ตรวจสอบความถูกต้องของการพิมพ์ครั้งนี้ อนึ่ง หากท่านอาจารย์ผู้สอนต้องการคู่มือเฉลยและไฟล์นำเสนอเพื่อสะดวกแก่การอธิบายในชั้นเรียน โปรดแจ้งความจำนงมายังสำนักพิมพ์ฯ เพื่อจัดส่งไปยังท่านอาจารย์ที่สถาบันการศึกษาโดยไม่เสียค่าใช้จ่ายใด ๆ ครับ

ปราโมทย์ เดชะอำไพ
นิพนธ์ วรรณโสภาคย์

ตุลาคม 2560

# สารบัญ


คำนำพิมพ์ครั้งที่ 10

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 9

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 8

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 7

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 6

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 5

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 4

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 3

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 2

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 1

**บทที่ 1 ก้าวแรกสู่วิธีเชิงตัวเลข** 1

1.1 บทนำ 1

1.2 วิธีเชิงตัวเลขคืออะไร 3

1.3 ความสำคัญของการศึกษาวิธีเชิงตัวเลข 4

1.4 คอมพิวเตอร์ 10

1.5 ความผิดพลาด 13

1.6 บทสรุป 17

แบบฝึกหัด 18

**บทที่ 2 รากของสมการ** 23

2.1 บทนำ 23

2.2 วิธีกราฟ 25

2.3 วิธีการแบ่งครึ่งช่วง 26

2.4 วิธีการวางตัวผิดที่ 29

2.5 วิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด 33

2.6 วิธีของนิวตัน-ราฟสัน 36

2.7 วิธีเซแคนต์ 41

2.8 คำสั่งสำเร็จรูปในแมทแลบสำหรับการหารากของสมการ 42

2.9 วิธีการหารากของระบบสมการแบบไม่เชิงเส้น 45

2.9.1 วิธีการทำซ้ำโดยตรง 46

2.9.2 วิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน 47

2.10 บทสรุป 50

แบบฝึกหัด 51

**บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น 59**

3.1 บทนำ 59

3.2 กฎของคราเมอร์ 62

3.3 วิธีการกำจัดแบบเกาส์ 64

3.4 ปัญหาที่อาจเกิดขึ้นจากวิธีการกำจัดแบบเกาส์ 69

3.4.1 ปัญหาจากการหารด้วยศูนย์ 69

3.4.2 ปัญหาความผิดพลาดจากการปัดเศษ 70

3.4.3 ปัญหาระบบสมการในภาวะไม่เหมาะสม 70

3.5 การปรับปรุงวิธีการกำจัดแบบเกาส์ 71

3.5.1 การเลือกตัวหลัก 71

3.5.2 การจัดสเกล 73

3.5.3 ระบบสามแถวทแยง 75

3.6 วิธีของเกาส์-ชอร์ดอง 77

3.7 วิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน 78

3.8 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยแมทแลบ 80

3.9 วิธีการแยกแบบแอลยู 82

3.10 คำสั่งสำเร็จรูปในแมทแลบสำหรับการแยกเมทริกซ์แบบแอลยู 87

3.11 วิธีการแยกแบบโชเลซกี 88

3.12 คำสั่งสำเร็จรูปในแมทแลบสำหรับการแยกเมทริกซ์แบบโชเลซกี 91

3.13 วิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี 92

3.14 วิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล 95

3.15 วิธีการผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง 97

3.16 วิธีคอนจูเกตเกรเดียนต์ 99

3.17 บทสรุป 112

แบบฝึกหัด 113

**บทที่ 4 การประมาณค่าในช่วงและนอกช่วง 123**

4.1 บทนำ 123

4.2 ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน 125

4.2.1 การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นตรง 125

4.2.2 การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสอง 126

4.2.3 การประมาณค่าในช่วงเชิงฟังก์ชันพหุนามทั่วไป 128

4.3 ฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์ 131

4.3.1 การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นตรง 131

4.3.2 การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสอง 133

4.3.3 การประมาณค่าในช่วงเชิงฟังก์ชันพหุนามทั่วไป 135

4.4 การประมาณค่าในช่วงด้วยเส้นโค้ง 138

4.4.1 การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นตรง 139

4.4.2 การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสอง 139

4.4.3 การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสาม 141

4.5 คำสั่งสำเร็จรูปในแมทแลบสำหรับการประมาณภายในช่วง 147

4.6 การประมาณค่านอกช่วง 148

4.7 บทสรุป 150

แบบฝึกหัด 151

**บทที่ 5 การถดถอยแบบกำลังสองน้อยสุด 157**

5.1 บทนำ 157

5.2 การถดถอยแบบเชิงเส้น 159

5.3 การประยุกต์การถดถอยแบบเชิงเส้นกับข้อมูลไม่เชิงเส้น 162

5.4 การถดถอยแบบพหุนาม 167

5.5 คำสั่งสำเร็จรูปในแมทแลบสำหรับการถดถอยแบบกำลังสองน้อยสุด 171

5.6 การถดถอยแบบหลายเชิง 172

5.6.1 แบบเชิงเส้น 173

5.6.2 แบบพหุนาม 179

5.7 บทสรุป 181

แบบฝึกหัด 182

**บทที่ 6 การหาค่าอินทิกรัลและค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข 191**

6.1 บทนำ 191

6.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู 193

6.3 กฎสี่เหลี่ยมคางหมูแบบหลายช่วง 199

6.4 กฎของซิมป์สัน 203

6.5 กฎของซิมป์สันแบบหลายช่วง 205

6.6 สูตรอินทิเกรตของนิวตัน-โคตส์ 208

6.7 การหาค่าอินทิกรัลแบบรอมเบิร์ก 212

6.8 การหาค่าอินทิกรัลแบบเกาส์ 217

6.9 การอินทิเกรตหลายชั้น 225

6.10 คำสั่งสำเร็จรูปในแมทแลบสำหรับการอินทิเกรต 228

6.11 การหาค่าอนุพันธ์ 230

6.12 คำสั่งสำเร็จรูปในแมทแลบสำหรับการหาค่าอนุพันธ์ 236

6.13 บทสรุป 237

แบบฝึกหัด 238

**บทที่ 7 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ 247**

7.1 บทนำ 247

7.2 วิธีของออยเลอร์ 250

7.3 วิธีของฮวน 254

7.4 วิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว 258

7.5 วิธีของรุงเงอ-คุททา 261

7.5.1 รุงเงอ-คุททาอันดับสอง 261

7.5.2 รุงเงอ-คุททาอันดับสาม 263

7.5.3 รุงเงอ-คุททาอันดับสี่ 265

7.6 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง 267

7.7 คำสั่งสำเร็จรูปในแมทแลบสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ 273

7.8 วิธีแบบหลายขั้น 275

7.8.1 วิธีของฮวนแบบเริ่มต้นเองไม่ได้ 276

7.8.2 วิธีของอาดามส์-แบชฟอร์ท 278

7.8.3 วิธีของอาดามส์-มูลตัน 280

7.9 บทสรุป 282

แบบฝึกหัด 284

**บทที่ 8 การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย 293**

8.1 บทนำ 293

8.1.1 คำนิยาม 294

8.1.2 ชนิดของสมการ 295

8.1.3 เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้น 297

8.2 สมการเอลลิปติก 298

8.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ 298

8.2.2 วิธีการแก้ 300

8.2.3 ตัวอย่าง 302

8.3 สมการพาราโบลิก 310

8.3.1 สมการเชิงอนุพันธ์ 310

8.3.2 วิธีแบบชัดแจ้ง 312

8.3.3 วิธีแบบปริยาย 317

8.3.4 วิธีของแครงก์-นิโคลสัน 320

8.4 สมการไฮเพอร์โบลิก 326

8.4.1 สมการเชิงอนุพันธ์ 326

8.4.2 วิธีการแก้ 328

8.4.3 ตัวอย่าง 330

8.5 บทสรุป 335

แบบฝึกหัด 335

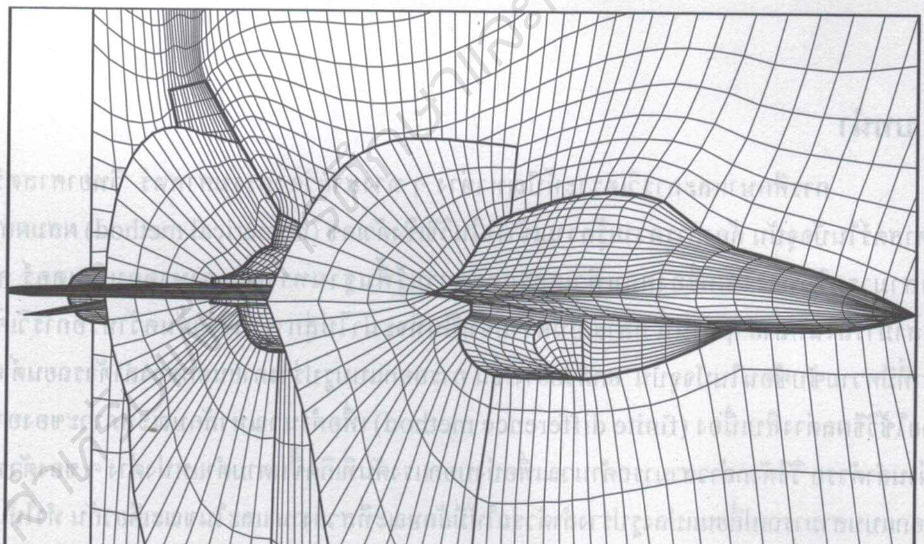
# บทที่ 1

# ก้าวแรกสู่วิธีเชิงตัวเลข

## 1.1 บทนำ

การศึกษาและการวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ ทางสายวิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ต้องการความรู้ความเข้าใจในวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) ผสมผสานกับความสามารถในการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์และความรู้พื้นฐานทางด้านภาษาคอมพิวเตอร์ ความรู้ความสามารถในหลาย ๆ ด้านนี้ กลายเป็นความจำเป็นที่จะนำไปสู่การทำวิจัยค้นคว้าหรือการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนในปัจจุบัน ยกตัวอย่างเช่น การออกแบบรูปร่างภายนอกของลำตัวรถยนต์ อาจทำได้โดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) เพื่อคำนวณหาลักษณะสภาวะของอากาศที่ไหลผ่านลำตัวรถ วิธีดังกล่าวสามารถคำนวณเพื่อบ่งบอกแรงดันที่เกิดขึ้นตามตำแหน่งต่าง ๆ ของตัวรถ เพื่อว่าผู้ออกแบบสามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างลำตัวรถให้มีลักษณะที่สวยงาม และในขณะเดียวกัน ทำให้แรงดันจากอากาศเกิดขึ้นน้อยที่สุดเพื่อการประหยัดน้ำมัน การออกแบบเครื่องยนต์ของรถยนต์ก็เช่นกัน อาจใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) ซึ่งสามารถทำการวิเคราะห์รูปแบบของเครื่องยนต์ที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ เพื่อคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิตามตำแหน่งต่าง ๆ ตลอดจนการขยายตัวและความเค้นที่เกิดขึ้นตามมาเพื่อป้องกันความเสียหายขณะใช้งาน ทั้งการออกแบบลำตัวรถและเครื่องยนต์ของรถยนต์สามารถทำได้โดยตรงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ผู้ออกแบบสามารถทำการคำนวณจนได้ผลลัพธ์ที่ก่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด ก่อนนำแบบที่ได้นั้นไปสร้างขึ้นเป็นต้นแบบของจริงเพื่อการทดสอบและการรับรองก่อนการผลิตต่อไป

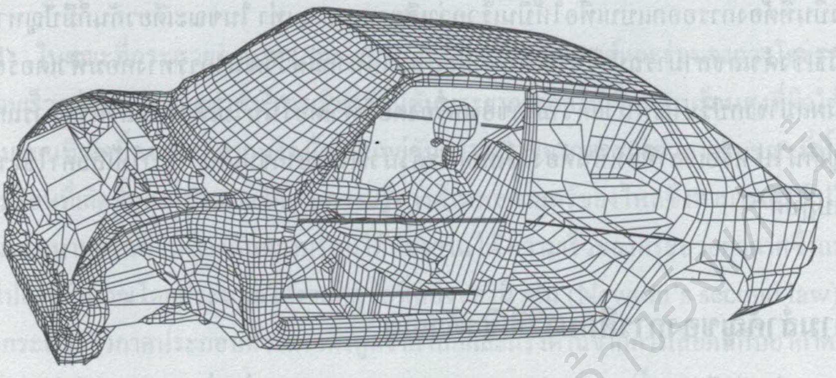
ในการออกแบบลำตัวรถเพื่อหาลักษณะความดันจากอากาศในขณะที่รถเคลื่อนตัว หรือการออกแบบเครื่องยนต์ของรถยนต์เพื่อหาลักษณะการกระจายของอุณหภูมิและความเค้นที่เกิดขึ้นนั้น ไม่สามารถทำได้โดยวิธีทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงเพื่อหาผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) เพราะปัญหาเหล่านี้มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนภายใต้เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ที่มีความซับซ้อนเช่นกัน ดังนั้น วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข เช่น วิธีผลต่างสืบเนื่องและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จึงมีบทบาทเป็นอย่างมากต่อการออกแบบผลิตภัณฑ์ในปัจจุบัน วิธีเหล่านี้ได้ถูกนำไปประยุกต์เพื่อใช้ในการคำนวณสำหรับงานทางด้านอื่น ๆ อย่างกว้างขวาง เช่น การออกแบบลักษณะลำตัวเครื่องบินเพื่อทำให้แรงต้านจากอากาศนั้นต่ำสุด โดยการคำนวณสภาวะของอากาศรอบตัวเครื่องบิน ด้วยวิธีการผลต่างสืบเนื่อง ดังแสดงในรูป 1.1 การปรับปรุงรูปร่างลำตัวกระสวยอวกาศเพื่อคำนวณหาลักษณะของสภาวะอากาศหลังจากที่ได้ถูกยิงขึ้นและบินเข้าสู่ชั้นบรรยากาศด้วยความเร็วกว่าเสียงหลายเท่า การออกแบบโครงสร้างรถยนต์ซึ่งหากเกิดการชนแล้วโครงสร้างด้านหน้าของรถจะยุบตัวค่อนข้างมาก ในขณะที่โครงสร้างของห้องผู้โดยสารนั้นยุบตัวเพียงเล็กน้อยดังเช่นแสดงในรูป 1.2 การออกแบบโครงสร้างเครื่องบินเพื่อให้มีน้ำหนักเบาแต่มีความแข็งแรงสูง การออกแบบสถานีอวกาศขนาดใหญ่ที่ไม่สามารถทดลองได้จริงบนพื้นโลก รวมไปถึงการคำนวณสภาวะอากาศบนพื้นโลกเพื่อทำนายทิศทางของพายุและเตือนให้ประชาชนอพยพหนีภัยก่อนพายุจริงจะมาถึง



**รูป 1.1** การใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องเพื่อคำนวณสภาวะอากาศ
ผ่านลำตัวเครื่องบิน

วิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้ปัญหาเหล่านี้ก่อให้เกิดประโยชน์เป็นอย่างมากต่อนักออกแบบ วิศวกร และนักวิทยาศาสตร์ในปัจจุบัน อย่างไรก็ตาม ผู้วิเคราะห์จำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานของวิธีเหล่านี้ก่อนนำไปประยุกต์ใช้ ทั้งวิธีผลต่างสืบเนื่องและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ตลอดจนวิธีอื่น ๆ ที่

เกี่ยวข้องกับการคำนวณซึ่งไม่ได้อ้างถึงในที่นี้ เป็นวิธีที่ไม่ยากแก่การทำความเข้าใจ หากแต่ต้องการความรู้พื้นฐานในการเรียนรู้ถึงวิธีเชิงตัวเลข หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ก่อนที่ผู้ศึกษาจะเรียนรู้วิธีผลต่างสืบเนื่องและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น จำเป็นต้องมีความเข้าใจวิธีเชิงตัวเลขมาก่อน ซึ่งในปัจจุบันวิชาวิธีเชิงตัวเลขได้ถูกบรรจุเป็นวิชาในการศึกษาระดับปริญญาบัณฑิตของการเรียนสายวิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และศาสตร์ด้านอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณ



รูป 1.2 การใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อคำนวณการยุบตัวของโครงสร้างรถยนต์ขณะเกิดการชน

## 1.2 วิธีเชิงตัวเลขคืออะไร

ชื่อของวิชาวิธีเชิงตัวเลขมักทำให้ผู้ที่ต้องการศึกษาเกิดความวิตกว่าวิชานี้ทำความเข้าใจได้ลำบาก และยิ่งไปกว่านั้นชื่อของวิชานี้ยังบ่งบอกเป็นนัยอีกว่ามีความเกี่ยวข้องพัวพันกับการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ ทำให้ผู้ศึกษาโดยเฉพาะผู้ที่ไม่เคยชินกับการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์มาก่อนเกิดความวิตกกังวลเพิ่มมากขึ้น ในเนื้อหาโดยแท้จริงแล้ววิธีเชิงตัวเลขเป็นเพียงกลุ่มของวิธีย่อย ๆ ที่ประกอบขึ้นอย่างเป็นขั้นเป็นตอน โดยแต่ละวิธีนั้นเหมาะสมกับการนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีลักษณะโดยจำเพาะในตัวเองซึ่งอาจแตกต่างกันออกไป หรืออาจกล่าวให้เข้าใจได้ง่ายขึ้นไปอีกระดับหนึ่งก็คือ วิชาวิธีเชิงตัวเลขนั้นเปรียบเสมือนตำราทำกับข้าว (cookbook) ซึ่งมีขั้นตอนกฎเกณฑ์ที่ค่อนข้างแน่นอน ลักษณะพิเศษของวิธีเชิงตัวเป็นวิธีของการดำเนินการทางเลขคณิต (arithmetic operations) แบบง่าย ๆ อันประกอบด้วยการบวก ลบ คูณ หารเป็นหลัก โดยมีการใช้เหตุใช้ผลตามหลักตรรกวิทยา (logic) ร่วมประกอบด้วย

จากคำอธิบายในภาพรวมของวิธีเชิงตัวเลขข้างต้นนี้ จะเห็นได้ว่าแนวความคิดของวิธีเชิงตัวเลขนี้ไม่ได้เป็นศาสตร์ใหม่เลย วิธีต่าง ๆ หลายวิธีได้ถูกคิดค้นกันขึ้นมาเป็นเวลานานแล้ว หากแต่ว่าไม่สามารถนำมาใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ จนกระทั่งถึงการก่อกำเนิดของคอมพิวเตอร์เชิงตัวเลข (digital computer) ทำให้วิธีเชิงตัวเลขสามารถนำมาใช้กันได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น สามารถแก้ปัญหาขนาดใหญ่ได้ภายในระยะเวลาอันสั้น รวมไปถึงปัญหาอื่น ๆ อีกเป็นจำนวนมากที่ไม่สามารถหาผลลัพธ์ได้ด้วยวิธีคณิตศาสตร์แผนเดิม (classical mathematics) การผสมผสานเข้าด้วยกันระหว่างวิธีเชิงตัวเลขและ

คอมพิวเตอร์ ก่อให้เกิดผลประโยชน์อย่างมากที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้โดยง่ายก่อให้เกิดผลลัพธ์อย่างรวดเร็ว ทำให้วิธีนี้ได้รับความนิยมและกลายเป็นรากฐานเพื่อใช้ศึกษาวิธีอื่น ๆ ที่อยู่ในระดับสูงขึ้นไป

อย่างไรก็ตาม การผสมผสานกันระหว่างวิธีเชิงตัวเลขกับเครื่องคอมพิวเตอร์เพื่อการแก้ปัญหาในบางกรณีก็ยังคงมีขีดจำกัด เนื่องจากมีปัญหาอีกจำนวนหนึ่งที่วิธีเชิงตัวเลขยังไม่สามารถหาผลลัพธ์ให้ได้ เช่น การจำลองสภาวะการเผาไหม้โดยสมบูรณ์ภายในเครื่องยนต์ไอพ่นสมัยใหม่ (scramjet) ของเครื่องบินที่ต้องการออกแบบเพื่อให้บินเร็วกว่าเสียงหลาย ๆ เท่า ในขณะเดียวกันก็มีปัญหาอีกจำนวนไม่น้อยที่วิธีเชิงตัวเลขสามารถนำไปใช้เพื่อหาผลลัพธ์ได้หากแต่วิวัฒนาการทางคอมพิวเตอร์ยังไปไม่ถึง ซึ่งอาจเป็นผลมาจากปริมาณหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์นั้นไม่เพียงพอสำหรับการแก้ปัญหาที่มีขนาดใหญ่เกินไป หรือเวลาที่จำเป็นต้องใช้เพื่อการคำนวณนั้นมากจนเกินไปทำให้เสียค่าใช้จ่ายจนไม่คุ้มทุนในทางปฏิบัติ

## 1.3 ความสำคัญของการศึกษาวิธีเชิงตัวเลข

ในหัวข้อย่อยนี้เราจะมาศึกษาตัวอย่างง่าย ๆ ตัวอย่างหนึ่งเพื่อจะแสดงให้เห็นประโยชน์ของการศึกษาวิธีเชิงตัวเลข จากตัวอย่างนี้เราจะพบว่าวิธีเชิงตัวเลขนั้นง่ายแก่การทำความเข้าใจ อย่างไรก็ตาม จุดประสงค์หลักของหนังสือเล่มนี้ นอกจากจะอธิบายขั้นตอนของวิธีเชิงตัวเลขเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์แล้ว จะพยายามเน้นการอธิบายสมการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ นั้นด้วย เพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงความหมายทางกายภาพ (physical meaning) อันจะเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการใช้วิธีเชิงตัวเลขในการวิเคราะห์ปัญหาขั้นสูงต่อไป ทั้งนี้ก็เพราะว่า การเข้าใจความหมายทางกายภาพของปัญหา จะช่วยทำให้เราเลือกใช้วิธีเชิงตัวเลขที่เหมาะสมกับปัญหานั้น ๆ ได้ดีที่สุด ยิ่งไปกว่านั้น ความเข้าใจในวิธีเชิงตัวเลข (ซึ่งมีหลาย ๆ รูปแบบที่เราจะศึกษาในบทต่าง ๆ กันต่อไป) โดยถ่องแท้ จะช่วยทำให้เราสามารถวิเคราะห์ปัญหานั้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ ในปัจจุบันถึงแม้จะมีโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้โดยตรง แต่หากผู้วิเคราะห์ปัญหาไม่มีความรู้พื้นฐานในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านั้น อาจไม่สามารถเลือกใช้โปรแกรมซึ่งเหมาะสมที่สุดกับปัญหานั้นได้อย่างถูกต้อง ทั้งนี้สืบเนื่องมาจากหลักความจริงที่ว่า

(ก) ไม่มีวิธีเชิงตัวเลขเพียงวิธีใดวิธีหนึ่งที่สามารถแก้ปัญหาได้ทุกชนิด

(ข) ไม่มีวิธีเชิงตัวเลขวิธีใดที่จะไม่ก่อให้เกิดค่าผิดพลาด (error) ของผลลัพธ์ที่คำนวณได้

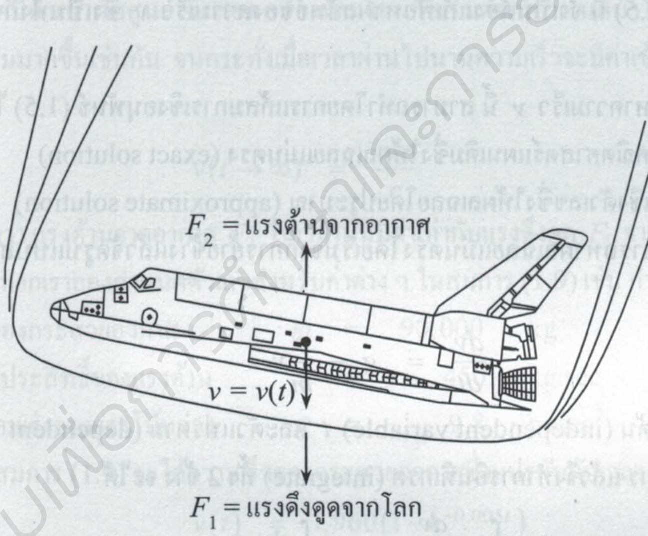
(ค) ไม่มีวิธีเชิงตัวเลขวิธีใดที่ดีที่สุดสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาในทุกกรณี

จากหลักความจริงดังกล่าวข้างต้นจะเห็นได้ว่า ความเข้าใจในพื้นฐานของวิธีเชิงตัวเลขนั้น มีความจำเป็นอย่างยิ่งในการวิเคราะห์ปัญหาทั่วไปทางสายวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ยิ่งไปกว่านั้นในขณะที่วิวัฒนาการทางด้านการคำนวณยังพัฒนาขึ้นไปดังเช่นในปัจจุบันนี้ พื้นฐานความเข้าใจในวิธีเชิงตัวเลขจึงเปรียบเสมือนรากฐานที่สำคัญเพื่อเสริมความสามารถในการคำนวณสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่

มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นไป ดังเช่นปัญหาการคำนวณสภาวะการไหลของอากาศผ่านเครื่องบินหรือการยุบตัวของโครงสร้างรถยนต์ในขณะเกิดการชน ดังที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้

เพื่อแสดงให้เห็นว่าวิธีเชิงตัวเลขนั้นเป็นวิธีที่ไม่ยากแก่การทำความเข้าใจ และสามารถนำมาใช้เพื่อการคำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณสำหรับบางปัญหาได้อย่างรวดเร็วเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีทางคณิตศาสตร์แผนเดิม เราจะมาศึกษาตัวอย่างง่าย ๆ ต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 1.1** ในขณะที่กระสวยอวกาศ (Space Shuttle) ดับเครื่องยนต์และร่อนจากวงโคจรกลับสู่พื้นโลกด้วยความเร็วกว่าเสียงหลายเท่านั้น การเสียดสีในชั้นบรรยากาศก่อให้เกิดความร้อนสูงที่ผิวใต้ท้องยาน ปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้นจะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับความเร็วของกระสวยอวกาศในขณะที่ทิ้งตัวลงมา ปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้นอาจคำนวณได้จากความรู้ทางด้านพลศาสตร์ของไหลซึ่งสามารถนำไปใช้ในการออกแบบความหนาของฉนวนป้องกันความร้อนใต้ท้องยานได้ ความเร็วของกระสวยอวกาศซึ่งแปรผันกับเวลาที่ผ่านไปอาจคำนวณโดยประมาณได้จากกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law) โดยแรงที่กระทำต่อกระสวยอวกาศประกอบด้วยแรงดึงดูดจากโลกและแรงต้านจากการเสียดสีกับอากาศ ดังแสดงในรูป 1.3




**รูป 1.3** แรงที่กระทำต่อกระสวยอวกาศขณะร่อนลงสู่พื้นโลก

<u>วิธีทำ</u> จากกฎข้อที่สองของนิวตันซึ่งกล่าวว่าแรงนั้นแปรผันกับมวลและความเร่ง ดังนี้

$$F = ma \tag{1.1}$$

โดย $F$ แทนแรงสุทธิ (net force) ซึ่งหากกำหนดทิศทางดิ่งลงสู่พื้นโลกเป็นบวก แรงนี้ก็คือ

$$F = F_1 - F_2 \tag{1.2}$$

ซึ่ง $F_1$ เป็นแรงดึงดูดจากโลก

$$F_1 = mg \tag{1.3}$$

โดย $m$ แทนมวล (mass) ของกระสวยอวกาศ และ $g$ แทนค่าของความเร่งจากแรงโน้มถ่วง (gravitational constant) แรง $F_2$ เป็นแรงต้านจากอากาศซึ่งอาจสมมุติให้แปรผันโดยตรงกับความเร็ว $v$ กล่าวคือ ยิ่งความเร็วสูง แรงต้านนี้ก็จะเพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย

$$F_2 \;=\; cv \tag{1.4}$$

โดย $c$ แทนสัมประสิทธิ์ของแรงต้าน (drag coefficient) ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างของวัตถุที่ต้านอากาศ รวมไปถึงลักษณะของผิววัตถุนั้นว่าเรียบหรือขรุขระเพียงใด เมื่อแทนสมการ (1.3) และ (1.4) ลงในสมการ (1.2) ทำให้สมการ (1.1) กลายมาเป็น

$$mg - cv \;=\; ma$$

แต่เนื่องจากความเร่งคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วกับเวลา ดังนั้น

$$mg - cv \;=\; m\frac{dv}{dt}$$

ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น (linear ordinary differential equation) ในรูปแบบ ดังนี้

$$\frac{dv}{dt} + \frac{c}{m}v \;=\; g \tag{1.5}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ (1.5) นี้ จำเป็นต้องแก้เพื่อหาผลลัพธ์ของความเร็ว $v$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา $t$ ที่เปลี่ยนแปลงไป

ในการหาความเร็ว $v$ นี้ สามารถทำโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (1.5) ได้ 2 วิธี ดังนี้

(ก) ด้วยวิธีคณิตศาสตร์แผนเดิมซึ่งให้ผลเฉลยแม่นตรง (exact solution)

(ข) ด้วยวิธีเชิงตัวเลขซึ่งให้ผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution)

เราสามารถหาผลเฉลยแม่นตรงโดยเริ่มจากการย้ายข้างแล้วจัดรูปแบบสมการ (1.5) ใหม่ ดังนี้

$$\frac{dv}{dt} \;=\; g - \frac{c}{m}v$$

จากนั้นจึงแยกตัวแปรต้น (independent variable) $t$ และตัวแปรตาม (dependent variable) $v$ ให้อยู่คนละด้านของสมการ แล้วจึงทำการอินทิเกรต (integrate) ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\int \frac{dv}{g - \frac{c}{m}v} \;=\; \int dt \tag{1.6}$$

ก่อให้เกิดผลจากการอินทิเกรต คือ

$$-\frac{m}{c}\ln\left(g - \frac{c}{m}v\right) \;=\; t + A \tag{1.7}$$

โดย $A$ แทนค่าคงตัวจากการอินทิเกรต (integrating constant) ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) เช่น หากเรากำหนดว่า เมื่อเวลา $t = 0$ นั้น ความเร็ว $v = 0$ แล้วแทนลงในสมการ (1.7) จะได้

$$A \;=\; -\frac{m}{c}\ln g \tag{1.8}$$

แทนค่า $A$ ที่ได้จากสมการ (1.8) ลงในสมการ (1.7) จะได้

$$-\frac{m}{c}\ln\left(g-\frac{c}{m}v\right) = t-\frac{m}{c}\ln g$$

$$\frac{m}{c}\ln\left(g-\frac{c}{m}v\right)-\frac{m}{c}\ln g = -t$$

$$\ln\left(1-\frac{c}{mg}v\right) = -\frac{c}{m}t$$

$$1-\frac{c}{mg}v = e^{-\frac{c}{m}t}$$

$$\frac{c}{mg}v = 1-e^{-\frac{c}{m}t}$$

$$v = \frac{mg}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right) \tag{1.9}$$

ผลเฉลยแม่นตรงดังแสดงในสมการ (1.9) แสดงให้เห็นว่า เมื่อเวลาเริ่มต้น $t=0$ นั้น ความเร็ว $v$ ของกระสวยอวกาศมีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดมาให้ เมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้นความเร็วก็จะเพิ่มมากขึ้นเช่นกัน จนกระทั่งเมื่อเวลาผ่านไปนานความเร็วจะมีค่าเข้าสู่ (approach) ค่าคงที่ค่าหนึ่ง นั่นคือ

$$v(t\to\infty) = \frac{mg}{c} \tag{1.10}$$

ซึ่งมีความหมายว่า แรงต้านจากอากาศ $F_2$ ในเวลานั้นมีค่าเท่ากับแรงดึงดูด $F_1$ จากโลก

หากเราลองกำหนดตัวเลขสำหรับค่าต่าง ๆ ในสมการ (1.9) เช่น กำหนดให้

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| มวลของกระสวยอวกาศ | $m$ | = | 90,000 | kg | |
| ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงต้าน | $c$ | = | 450 | kg/sec | (1.11) |
| ค่าความเร่งจากแรงโน้มถ่วง | $g$ | = | 9.8 | m/sec$^2$ | |

แล้วแทนลงในสมการ (1.9) จะได้ความเร็วของกระสวยอวกาศซึ่งแปรผันกับเวลา ดังนี้

$$v(t) = 1{,}960\left(1-e^{-0.005t}\right) \tag{1.12}$$

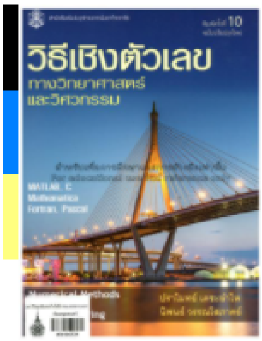
ผลเฉลยของความเร็วที่เวลาต่าง ๆ กันได้แสดงในตาราง 1.1

แทนที่จะหาผลเฉลยแม่นตรง เราอาจหาผลเฉลย โดยประมาณด้วยการใช้วิธีเชิงตัวเลขได้โดยง่ายดังต่อไปนี้ หากเราพิจารณาสมการอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น (1.5) จะเห็นว่า ค่าที่จำเป็นต้องหาคือ ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว $dv/dt$ ซึ่งสามารถหาได้จากการประมาณด้วยการพิจารณากราฟการเปลี่ยนแปลงของความเร็วกับเวลา ดังแสดงในรูป 1.4 ที่จุด $A$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว $dv/dt$ ซึ่งก็คือความชัน (slope) อาจประมาณค่าได้โดย

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2-v_1}{t_2-t_1} \tag{1.13}$$

สามารถยืมและติดตามหนังสือใหม่ได้ที่ ระบบห้องสมุดอัตโนมัติ WALAI AutoLib

http://lib.rmutp.ac.th/catalog/BibItem.aspx?BibID=b00104518




Multi view View map

**วิธีเชิงตัวเลขทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม / ปราโมทย์ เดชะอำไพ และ นิพนธ์ วรรณโสภาคย์.**

| | |
|---|---|
| **Author** | ปราโมทย์ เดชะอำไพ |
| **Published** | กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2560 |
| **Edition** | พิมพ์ครั้งที่ 10. (ฉบับปรับปรุงแก้ไข) |
| **Detail** | 410 หน้า : ภาพประกอบ ; 26 ซม |
| **Subject** | การวิเคราะห์เชิงตัวเลข(+) |
| | การคำนวณเชิงตัวเลข(+) |
| | คณิตศาสตร์วิเคราะห์(+) |
| | คณิตศาสตร์วิศวกรรม(+) |
| | สมการเชิงอนุพันธ์(+) |
| | ไฟไนต์เอลิเมนต์(+) |
| | เวกเตอร์วิเคราะห์(+) |
| | วิศวกรรมศาสตร์ -- ระเบียบวิธีทางสถิติ(+) |
| **Added Author** | นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ |
| **ISBN** | 9789740336792 |
| **ประเภทแหล่งที่มา** | Book |